

Dlaczego piłka ma 12 pięciokątów?

Od wzoru Eulera do geometrii i topologii

Maciej Starostka

© 2026 Maciej Starostka
Wszelkie prawa zastrzeżone.

Wydanie pierwsze, 2026
ISBN 978-83-983211-0-5

Dlaczego ta książka?

Matematyka wielu osobom kojarzy się przede wszystkim z liczeniem: wykonywaniem rachunków, przekształcaniem wzorów i szukaniem właściwego wyniku. Tymczasem znaczna część matematyki wygląda zupełnie inaczej. Często ważniejsze od samego obliczenia jest znalezienie właściwego sposobu patrzenia na problem.

Sam bardzo często myślę o matematyce geometrycznie. Dotyczy to również zagadnień, które na pierwszy rzut oka są czysto analityczne i zapisuje się je za pomocą wzorów. Rysunek, deformacja powierzchni, wyobrażenie sobie krajobrazu czy ruchu po pewnej przestrzeni potrafią podpowiedzieć, co powinno być prawdą, zanim jeszcze pojawi się formalny dowód.

Takie intuicje nie zastępują ścisłego rozumowania. W matematyce trzeba je później sprawdzić, doprecyzować i udowodnić. Są jednak często pierwszym krokiem do zrozumienia problemu. W tej książce bardziej niż na samych odpowiedziach zależy mi więc na próbie zrozumienia, dlaczego coś jest tak, a nie inaczej — skąd bierze się definicja, dlaczego pewien wzór ma właśnie taką postać i co naprawdę stoi za twierdzeniem.

Dlaczego piłka futbolowa ma dwanaście pięciokątów? Czy mieszkańcy powierzchni mogliby odkryć jej zakrzywienie bez oglądania jej z zewnątrz? Dlaczego nie każdy krajobraz jest możliwy? Czy da się uczesać kulę? Czy można przesunąć każdy punkt tak, aby żaden nie pozostał na swoim miejscu?

Czasami odpowiedź będzie wymagała wzoru, czasami rysunku, a czasami prostego eksperymentu myślowego. Najważniejsze nie będzie jednak zapamiętanie nazw twierdzeń ani symboli.

Jeżeli w tekście pojawia się termin matematyczny, który nie jest później potrzebny, można go spokojnie zapomnieć. Jeżeli pojawia się bardziej formalny rachunek oznaczony jako fragment dla zainteresowanego czytelnika, można go pominąć i wrócić do głównej opowieści. Rysunki mają tu nie tylko ozdabiać tekst, lecz często zastępować definicję albo część dowodu.

Najbardziej zależy mi na tym, aby po przeczytaniu rozdziału pozostał pewien obraz i pytanie. W matematyce często właśnie od dobrego pytania zaczyna się wszystko.

W kilku miejscach znajdują się też ramki *Czego matematycy nie wiedzą?*. Mają przypominać, że nie oglądamy muzeum dawno ukończonej nauki.

Spis treści

Dlaczego ta książka?	iii
1 Dlaczego piłka futbolowa ma 12 pięciokątów?	1
1.1 Przypadek czy prawo?	4
1.2 Euler liczy wielościany	5
1.3 Co się stanie, jeśli przetniemy ścianę?	7
1.4 Dlaczego trójkąty?	9
1.5 Jak udowodnić wzór Eulera?	9
1.6 Drzewo	12
1.7 Co właściwie właśnie udowodniliśmy?	14
1.8 Dlaczego wielościanów foremnych jest tylko pięć? . .	15
1.9 Co ma wspólnego wzór Eulera z materia?	17
1.10 Charakterystyka Eulera powierzchni	26
1.11 Ta sama liczba wróci jeszcze kilka razy	33
2 Jak mrówki mogłyby odkryć topologię Ziemi?	35
2.1 Defekt jako krzywizna	39
2.2 Od wielościanu do gładkiej powierzchni	41
2.3 Krzywizna Gaussa	42
2.4 Gauss–Bonnet: krzywizna liczy dziury	53
2.5 Trzy przykłady	54
3 Dlaczego nie każdy krajobraz jest możliwy?	61
3.1 Co się dzieje, gdy wody przybywa?	63
3.2 Minimum: rodzi się nowa kałuża	63
3.3 Przełącz: doklejamy pasek	65

3.4	Maksimum: zamykamy ostatni otwór	66
3.5	Euler po raz trzeci	66
3.6	Polewanie wodą sfery i torusa	67
3.7	Drzewo genealogiczne linii brzegowych	68
3.8	Ile przełączy kosztuje jeden uchwyt?	71
3.9	Ta sama historia bez wody	73
4	Dlaczego nie da się uczesać kuli?	75
4.1	Jak matematycy czeszą kulę?	76
4.2	Gdzie na Ziemi musi przestać wiać?	77
4.3	Nie każde zero wygląda tak samo	77
4.4	Poincaré–Hopf: lokalne wiry pamiętają całą powierzchnię	79
4.5	Najprostszy przykład: obracająca się sfera	86
4.6	Dlaczego torus daje się uczesać?	86
4.7	Góry i przełęcze pojawiają się ponownie	89
4.8	Co właściwie wymusza topologia?	90
	Jedna liczba, cztery języki	93
5	Czy można przesunąć każdy punkt?	95
5.1	Najpierw jeden wymiar	96
5.2	Mieszanie kawy i nieruchomy punkt	98
5.3	Dlaczego dysku nie da się opróżnić z punktów stałych?	100
5.4	Co się stanie, jeśli usuniemy brzeg?	101
5.5	Brouwer wraca do triangulacji	104
5.6	Gra, w której nie ma remisu	110
5.7	A co ze sferą?	113
5.8	Lefschetz: charakterystyka Eulera wraca jeszcze raz	113
5.9	Od zer do punktów stałych	116
6	Ile punktów krytycznych wymusza topologia?	119
6.1	Dwa punkty wystarczą tylko sferze	119
6.2	Jak zmierzyć topologiczną złożoność inaczej?	120
6.3	Topologia nie daje się oszukać małpim siodłem	125

7	Czy po przeciwnej stronie Ziemi może być tak samo?	131
7.1	Najpierw okrąg	131
7.2	Na sferze możemy zrównać dwie wielkości naraz . . .	132
7.3	Dlaczego to może być prawdziwe?	136
7.4	Jedno cięcie dla dwóch płam	139
7.5	Chleb, ser i szynka	140
7.6	Topologia znowu mówi: coś musi istnieć	141
	Epilog	143
	O autorze	147